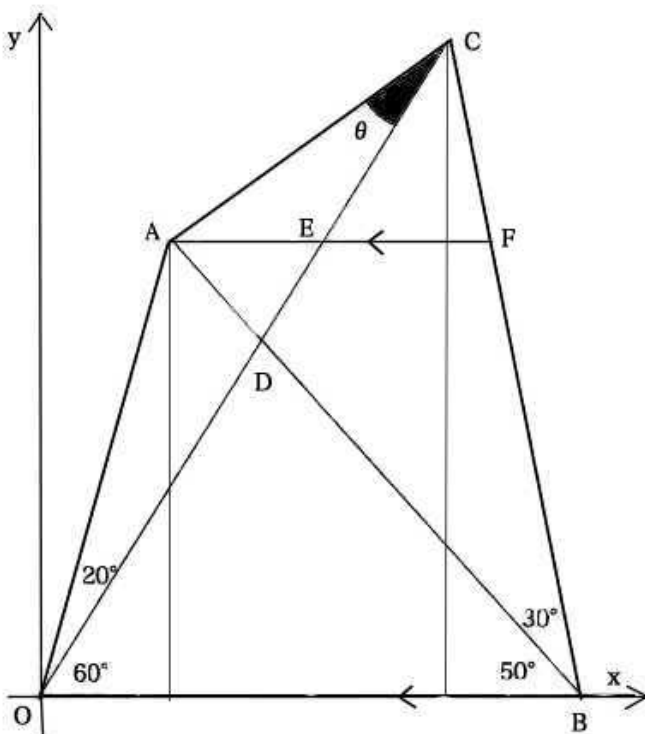
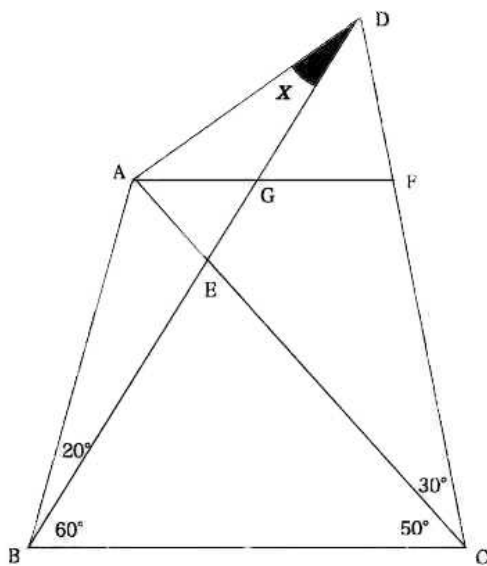


ラングラーの問題

福沢正男

図のように、辺BCの両端から 60° 、 20° 、および 50° 、 30° の角を取り、いくつかの交点からできる $\angle x$ の大きさを求めよというのが初等幾何で有名な「ラングラーの問題」である。難問ながら、多くの「エレガント」な解答が知られている。

この問題に自分なりの解答を求めてみたものの、いったんは挫折した。その後、努力のかい(?)あって、あまりエレガントとはいえないが、一応解いてみたのでここに掲載する。用いた方法は三角比である。



Oを原点、OBを x 軸とする直角座標系を考え、それぞれ $B(0, 0)$ 、 $C(1, 0)$ とする(上の図とは点の名が異なる)。AF//OBとなる直線AFを引き、 $AE=CE$ を示せば $\triangle ACE$ は二等辺三角形となり、 $\angle CEF=60^\circ$ から $\theta=30^\circ$ が得られる。

三角比を用いて点A,C,Eの座標を求め、その座標からAE,CEの長さを計算して $AE=CE$ を示そうという目論見である。

① Aの座標を求める.

$A(x, y)$ とするとき, y はAからOBに下ろした垂線の長さ $x \tan 80^\circ$ で, これは $(1-x) \tan 50^\circ$ に等しいから, $x \tan 80^\circ = (1-x) \tan 50^\circ$. これから

$$x = \frac{\tan 50^\circ}{\tan 50^\circ + \tan 80^\circ}, \quad y = \frac{\tan 50^\circ \tan 80^\circ}{\tan 50^\circ + \tan 80^\circ}.$$

② Cの座標を求める.

$C(x, y)$ とする. この y はCからOBに垂線を下ろした垂線の長さ $x \tan 60^\circ$ で, これは $(1-x) \tan 80^\circ$ に等しいから, $x \tan 60^\circ = (1-x) \tan 80^\circ$. これから

$$x = \frac{\tan 80^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 80^\circ}, \quad y = \frac{\tan 60^\circ \tan 80^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 80^\circ}.$$

③ Eの座標を求める.

$E(x, y)$ の y 座標は A の y 座標と同じである. Eの x 座標は $y/x = \tan 60^\circ$ より

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} y. \quad \text{よって } x = \frac{\tan 50^\circ \tan 80^\circ}{\sqrt{3}(\tan 50^\circ + \tan 80^\circ)}, \quad y = \frac{\tan 50^\circ \tan 80^\circ}{\tan 50^\circ + \tan 80^\circ}$$

④ AEの長さはAとEの x 座標の差となる.

$$\begin{aligned} AE &= \frac{\tan 50^\circ \tan 80^\circ}{\sqrt{3}(\tan 50^\circ + \tan 80^\circ)} - \frac{\tan 50^\circ}{\tan 50^\circ + \tan 80^\circ} \\ &= \frac{\tan 50^\circ (\tan 80^\circ - \sqrt{3})}{\sqrt{3}(\tan 50^\circ + \tan 80^\circ)}. \end{aligned}$$

以上でA, C, Eの座標がそろい, AEも求められた. 残るはCEである.

⑤ CE^2 は C, Eの x, y 座標のそれぞれの差の自乗の和であるから

$$\begin{aligned} CE^2 &= \left(\frac{\tan 50^\circ \tan 80^\circ}{\sqrt{3}(\tan 50^\circ + \tan 80^\circ)} - \frac{\tan 80^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 80^\circ} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\tan 50^\circ \tan 80^\circ}{\tan 50^\circ + \tan 80^\circ} - \frac{\tan 60^\circ \tan 80^\circ}{\tan 60^\circ + \tan 80^\circ} \right)^2 \end{aligned}$$

ここから先は式の見通しやすさのために

$$\tan 50^\circ = t_5, \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \tan 80^\circ = t_8$$

として書き直して見ると

$$CE^2 = \left(\frac{t_5 t_8}{\sqrt{3}(t_5 + t_8)} - \frac{t_8}{\sqrt{3} + t_8} \right)^2 + \left(\frac{t_5 t_8}{t_5 + t_8} - \frac{\sqrt{3} t_8}{t_6 + t_8} \right)^2$$

となる．自乗を展開すると

$$= \left(\frac{t_5^2 t_8^2}{3(t_5 + t_8)^2} - \frac{2t_5 t_8^2}{\sqrt{3}(t_5 + t_8)(\sqrt{3} + t_8)} + \frac{t_8^2}{(\sqrt{3} + t_8)^2} \right) \\ + \left(\frac{t_5^2 t_8^2}{(t_5 + t_8)^2} - \frac{2\sqrt{3} t_5 t_8^2}{(t_5 + t_8)(\sqrt{3} + t_8)} + \frac{3t_8^2}{(\sqrt{3} + t_8)^2} \right)$$

通分，簡約すると

$$= \frac{4t_8^4(\sqrt{3} - t_5)^2}{3(t_5 + t_8)^2(\sqrt{3} + t_8)^2}.$$

よって

$$CE = \frac{2t_8^2(\sqrt{3} - t_5)}{\sqrt{3}(t_5 + t_8)(\sqrt{3} + t_8)}$$

となる．一方，AEは

$$AE = \frac{\tan 50^\circ (\tan 80^\circ - \sqrt{3})}{\sqrt{3}(\tan 50^\circ + \tan 80^\circ)} = \frac{t_5(t_8 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}(t_5 + t_8)}$$

だったので，もしAE=CEならば AE-CE=0 となるはずである．そこで，AE-CEを計算してみよう．

$$AE - CE = \frac{t_5(t_8 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}(t_5 + t_8)} - \frac{2t_8^2(\sqrt{3} - t_5)}{\sqrt{3}(t_5 + t_8)(\sqrt{3} + t_8)} \\ = \frac{t_5(t_8 - \sqrt{3})(t_8 + \sqrt{3}) - 2t_8^2(\sqrt{3} - t_5)}{\sqrt{3}(t_5 + t_8)(\sqrt{3} + t_8)} \\ = \frac{3t_5 t_8^2 - 2\sqrt{3} t_8^2 - 3t_5}{\sqrt{3}(t_5 + t_8)(\sqrt{3} + t_8)}.$$

ここで $t_5 = \tan(80^\circ - 30^\circ) = \frac{t_8 - t_3}{1 + t_8 t_3} = \frac{\sqrt{3} t_8 - 1}{\sqrt{3} + t_8}$ を用いて t_5 を消去すると

$$= \frac{t_8^3 - 3\sqrt{3}t_8^2 - 3t_8 + \sqrt{3}}{(t_8^2 + 2\sqrt{3}t_8 - 1)(\sqrt{3} + t_8)} \dots\dots\dots (A)$$

最後に $t_8 = \tan 80^\circ$ を消去するために，正接の3倍角公式を用いて

$$\tan 240^\circ = \tan(3 \times 80^\circ) = \frac{3t_8 - t_8^3}{1 - 3t_8^2} = \sqrt{3} \text{ より } t_8^3 - 3\sqrt{3}t_8^2 - 3t_8 + \sqrt{3} = 0. \text{ これは}$$

上記の式 (A) の分子そのものである．ゆえに $AE - CE = 0$ が成り立つ． $\parallel$

2024.3.6