数のなりたち

—— わたしの自然数論 ——　　寸虫先生に捧ぐ

福沢 正男

1．数の始まり

1－1．計数の時代

数は，われわれ人類（＝ヒト）が，自然や意識の外界に存在する事物の「量」を高度に抽象化した概念である．ヒトの事物に対する認識の過程は，多く個別的なものから特殊なものへ，そして一般的なものへという道筋をたどる．数の認識もそうである．その過程をやや図式的であるがたどってみよう．

われわれがある対象に何らかの，例えば「A」という名称を付けることによって，その対象を質的に規定する．そのときわれわれはAとAでないものを「区別」している．この区別は「Aでないもの」の規定となる．この「Aでないもの」という規定は「質としてAでないもの」と，「質としてはAであるが存在としてはAでないもの」という二重の規定であることに気づく．認識論上，前者をAの「他在」，後者をAの「他者」という．他者を規定すると同時にA自身は「一者」となる．この一者がAの「個別的存在形態」である．一者が他者を規定することを「同定」という．同定の対象は他在のなかにあり，他在と他者は一者（＝A）を基準として相互に反発しあう．一者とその他在および他者とはAの及ぶ外延の変化によって相互に作用しあう．AはA’と「同じもの」であるが BはAではない等々．これらの対立の中から，AとA’が同じものであるならばA’も一者であり，今度はAがA’の他者となる…．こうした「互いに一者であり他者であるという状態」からA，A’，…は「Aというもの」の「特殊な存在」であるという状態を生み，「Aというもの」はAの「概念」となる．概念は事物の意識への相対的に正確な反映である．

概念としてのAを規定する過程が「認識」である．認識されたAはもはや一者および他者として区別されず，それは「多在」（≠他在）となる．Aの多在がAの特殊的存在形態であることに対して，概念としてのAは一般的存在形態となる．

例えば，りんごという実体を「くだもの」（＝A）という名称によって規定すれば，それによってくだものであるもの（みかん＝他者）とそうでないもの（石，猫など＝他在）が区別される．りんごは一者（個別的存在）であり，みかんは他者である．みかんもくだものであると規定することが同定である．この同定によってくだものはりんごやみかんの統一されたものとして概念となる．りんごとみかんはくだものの多在となり，くだものの特殊的存在となる．しかしまた，りんご とみかんは異なるものという新たな質的規定が生まれると，「みかん」という名称からりんごはみかんの他在となる…，こうしてくだものの外延の変化によって認識が深まっていくのである．

概念としてのAは，その外的・内的要因から質としての存在が変革・破壊されることがある．AがAでなくなるとはAが「Aでないもの」に転化することであるが，その契機となるのがAの「量」である．量は質の潜在的側面であり，また動的形態である．量はAがAであるうちは意識されることはない．しかしAがAでないものになろうとするとき，その質との対立が顕在化する

ことで，われわれは質の，質としての存在を維持するための「限界」を知るのである．Aの限界とはAがAでなくなることを認識することである．Aの限界が，Aの量としての存在を認識させるのである．質は質だけで変わることはできない．質が変わるのはその内的側面としての量の変化が質を変えるのである．

Aの量的存在を「単位」という．すべてのA（多在）が単位という限界を持っている．Aの多在は互いに単位としては区別されないのである．

例えば，りんごを腐敗させてしまったなら，それはもうりんごではないであろう．それはりんごであったものである．このとき，りんごという質を変化させたものは腐敗というりんごの動的形態である．腐敗はりんごの量的変化の顕在化である．そしてそこから反省的にりんごの限界を知ることで，りんごがりんごとして維持されている状態を示す「単位」という規定に行き着くのである．

多在するAの例として a, b を取るとき，a, b は異なる存在であるが．量的には区別されない．このことを「a=b」と表そう．「=」を「等号」といい，等号を用いた表現を「等式」といい，等号の左側を左辺，右側を右辺という．これはもちろん重さとか値段とかの意味ではない．等式の左辺の a の量的存在（＝単位）を右辺の b が表わしているのである．質としては等しい a,b が存在としては別のモノであることを用いて a が b 自身を用いて自分の量を表現しているのである．

a=a は意味のない同義反復であるが，a=b は単なる形式的表現ではない．aとbはともにAでありながら異なる個別的存在で，aはbではないが，しかしaの単位はbと同じであるという，互いに牽引しまた反発する関係にある[1]．等式は，aという質的存在の，量としての潜在的側面を，bによって現出するのである．aの量が質に対して持つ潜在的対立が，それを b によって現すことで顕在化するのである．a を見ているだけではわからない a の量的存在を b が体現しているのがこの等式の意味である．ヒトが量すなわち限界を認識しないうちはこの等式は成り立たない．Aにおける量の認識が初めてこの等式を成り立たせる．

例えば，aというりんごとbというみかんは同じ「くだもの=A」であると認識したとき，a=bという等式が成り立つ．このときりんごはみかんと「同じもの」であるのだが，存在としては別物であることが前提である．りんごが腐ってきて（=限界）りんごでなくなったときには等式は成り立たなくなる．くだものの限界を知ることが等式の成立・不成立を決定する．

a は，等式 a= b によって b の中に自分を見出す．a は b である．しかし一方で a は b ではない．この対立が a と b だけの関係ならば等式の意味はそれだけのことであるが，しかしAの多在 b , c, d, …等から a=b の他に a=c，a=d 等々の等式が見出されてくることによって a がいろいろなAの多在によって表現されるようになると，aは b でもあり，cでもあり，…となって，ヒトの意識に「多くの a」という量的概念が芽生えてくる． 多くの a は「多くのA」であるから，Aの「計量」という規定を生み出す．「多くの〜」というのは誰もが幼少期に最初に行なう物理的計量であろう．計量は同質のモノの多在を意識することから生じる必然的な認識行為である．「多くのA」という規定は反省的に量の具体的規定に向かい，ついに最初の「計数」

[1] 反発と牽引とは同質のものの中に潜む対立と統一を表現する概念である．

としての「２」が生まれ，「A=2」という等式が誕生する．具体的事物を計量して計数を与えることを「数える」という．計数は質Aが具体的に計量されたときの量的表現である．ここではまだ「２」は抽象的な数とまではいえず，Ａという質と結びついた固有の量的表現である．ともあれこうして「a＝ｂ」という等式は「A=2」という新たな形態に到達する．左辺のAはもう個別の一者ａではなくＡという概念そのものであり，右辺の２はAの計量された計数である．a=ｂのときの両辺の（見かけの）同一性はもう消え去っている．この意味で A=2 を「計数等式」と呼ぶ．人類のこの時代を数学史的試みとして「計数の時代」と呼ぶことにしよう．

「２」はおそらく人類が最初に規定した計数であろう．計数は量の内的対立（=反発と牽引）が生み出す単位の外延的規定である．この２の中では a，ｂそれぞれの単位が独立に含まれながら同時に一つのものとして規定される．ひとたび計数が規定されるとそれは形式的になり，２から３へ，または４へとAの多在に応じて敷衍されていく．そして今度は２という計数が規定されたことから，単位自身が「２ではない」計数として規定され，単位は計数としての１に転化する[2]．

１－２．数の始まり

計数はまだ「数」ではないが，そこには自然発生的な「自然数」の萌芽が見られる．この時点ではくだもの３個とウサギ３匹の「３」は同じ３とは認識されていないのであるが，りんご２個とみかん３個でくだもの５個というような，具体的な質と結びついた加法や減法などは存在したであろう．Aの多在における具体的な「計算」が，のちの「数」における「計算」につながって行くのである．言い換えればあらゆるモノの計量の必要性が数を生んだのである．

計数が数になるためには，A以外の「他のもの」の計数化を前提とする．すなわち，Aの他在（多在ではない）の中から「Bである」「Cである」等々と規定されたものの量として規定された計数の存在が必須である．そこからそれらの計数がAの計数と同じ「質」である，すなわち「数」という概念であるという認識に到達するのである．

この克服は現実的・歴史的に行なわれる．それは人類の歴史的・社会的過程として多くの物理的時間をかけて達成されるのである．

数の発明のもっとも直接的な契機は古代社会における物資の交換であろう．ヒトは生活上の必要にかられてモノとモノを交換する．容易に想像されるように，最初の物々交換は個別的・偶然的なものであろう．

「交換価値は，さしあたり，一つの種類の使用価値が他の種類の使用価値と交換される量的関係，すなわち比率として現れる．」[3]（マルクス）

モノの個別的・偶然的な交換は，人類の一定の社会生活の発達を前提に，個々の物資の計量された計数によって行なわれる．無邪気な想像を許して，食料としての「ウサギ二匹」と生活用具としての「土器３個」を交換するとしよう．交換が平和的に納得ずくで行なわれたならば，

---

[2] 当然ながらここでいう1,2,…等の「数字」が初めから使われているわけではない．いわゆる記数法はそれこそ単位人間社会の数だけ存在したであろう．

[3]「資本論」新日本出版社新書版第一分冊(1985年第11刷) p.61 資本論翻訳委員会 訳

このウサギ二に対して土器３という比率は当事者たちに記憶（あるいは記録）され，別の機会の交換においての参考にされるであろう．それぞれの計数等式は「ウサギ＝二」「土器＝３」であるが，この「二」や「３」は交換されるモノの質的側面が捨象されて抽象的な量を表しているのだから，物質的に取得や携帯が便利な小石や木切れ等に置き換えられる．「ウサギ＝小石二個」「土器＝木切れ３本」等々．やがて交換当事者たちの契約・取り決めによって小石に統一されると，どちらの計数も小石の計数に置き換えられ，ついには「ウサギ＝小石２個」「土器＝小石３個」という等式に至る．この等式では「小石」という具体的物質によってウサギや土器などの計数を現している．こうなると交換の当事者たちは，直接ウサギや土器を持たずして「ウサギ二匹」という意味で「小石二個」，土器３個という意味で「小石３個」を示すことができる．このときの小石は一方はウサギを，他方は土器を表し，小石は単にそれぞれの物資の量的側面を表しているに過ぎないのだが，さらに社会生活の広がりや共通言語の発達によって「ことばによる数詞」が生み出されると小石さえも必要がなくなってくる．こうして「二」や「３」という個別のモノの計数が次第にモノ自体から離れ，独立した抽象的概念（＝数）として人々に認識されていくのである．「ウサギ二匹＝小石２個」「土器＝小石３個」から「ウサギ＝２」「土器＝３」という計数等式が確立される．この場合の２や３は小石の計数から発展した共通の数詞として使用される．こうして計数が「数」として概念化されると，あらゆるものの計量が数によって行なわれるようになる．

文字の発明にともなって数の記録も開始される（「記数」の始まり）．人類は完全に抽象化された量としての「数」を認識するに至る．ヒトは数によってあらゆるものを計量し，数は人間の社会生活の高度化にともなっていよいよ普遍的一般的な概念となっていく．

1−3. １の発見

計数として認識された量は，上記のような過程を経て数という概念に転化する．数はあらゆるものの計数である．数はもうある特定の質的存在の量だけではなく，すべてのモノの統一した量の表現形態になる．言い換えればあらゆるモノが数の表現形態にもなる．例えば計数等式「りんご＝３」では，個別的な等式 a=bでは内在的な見えない関係でしかなかった質と量の関係が明瞭に表現されている．りんごは質を表し，３は量を表している．

数の概念の確立において重要なのが，単位としての１が数として認識されることである．歴史的に単位はもとは対象Aの個別的存在を量的に表すだけのものであったが，２,３…の数ができるときの反省的な規定として，例えば「りんごは（２個ではなく）１個である」というように，これを２や３と同じ数として扱うことが必要になる．

もともと２,３…という数の確立が単位を基準にしていることは明白であるが，単位も同様に数であると規定するのは一つの意識革命である．２,３…は対象Aの多在を計量することで生まれてきた計数である．その計数が個別の対象から離れて独立の概念となるためには，どの事物も特殊的存在の計量表現としては「１」であるという認識にいたらなくてはならない．

１は単位であると同時に計数でもあることの認識をもって「**１の発見**」という．数学史上最初の「基本定数」の誕生である．１の発見によって，２,３…とは「多くの１」のことであるという「集合数」としての性格を明確にする．対象Aの「量」が持っていた反発と牽引からの展開

は，今では単位と集合数として数自身の内在的対立を表すことでその最終的な形態を獲得した[4]．これがこの後の「演算」や自然数以外の数への発展の原動力となっていくのである．１の発見は数学史においてあまり顧みられないことであるが，人類の数学的発展の上からは「０」の発見同様重要な出来事として位置づけられなければならない[5]．

人類が早くから数の中の単位と集合数の関係を見抜いていたことは，2進法，4進法，5進法，10進法，12進法，60進法など様々な社会条件に対応した記数法の存在に現れている．例えば現在も使用されているローマ数字は５進法である．Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴでは，Ⅰが一本ずつ増えながら，Ⅴで新しい記数になる（ⅣはⅤの前という意味（減算則）であるからⅤが基準になっている）．これはⅤを（Ⅰの次の）新たな単位として採用し，さらにVI,VII,VIII,IX,ときて次にⅩになるのである．これはヒトの片手の指が五本，両手で十本との関係が濃厚である．

記数法は数の歴史上重要な課題ではあるが，数の本質を論じようとする拙論では10進数のみを扱い，数詞も算用数字だけを用いている．

こうして人類が最初に獲得した数体系として，１,２,３…という「自然数」が誕生するのであるが，これはもちろんまだ数学的に体系化された自然数ではない．文字通り自然発生的な数である．これを「素朴な自然数」と呼ぼう．

実際の事物の具体的計量は，素朴な自然数にいま一つ重要な性質のあることを計量する者に想い至らせる．それは数には「大・小」という「空間的な」関係があるのではないかということである．具体的事物が１個よりも２個ある方がより大きな空間を占めることは，数としての２が１よりも「大きい」ことを誘起させる．このように具体的事物の空間的形態が数に持ち込まれることで，あたかも数自身にはそうした性質があるかのようにヒトが意識し，それを自然数の重要な性質として規定する．同じように，やはり具体的事物を１個，２個，３個，…と「一列に」並べていくさまを数に反映することから，数には「次の数」または「後の数」があることを考える．１の次は２，２の次は３，…等々．そして「次の数」「後の数」の反省から「後ろの数」または「前の数」という線形的または時系列的な性質も数に反映させるようになる．この考え方では，一列に並べられた事物は１個目から始まるため，数としての「１の前」は存在しない．こうして１は「最小かつ最初」の自然数であるという規定が生まれる．

このようにして素朴な自然数に空間的・時系列的な性質がもたらされることになった．これらはのちに自然数の「順序的性質」として厳密に定式化されるが，もともとは具体的事物の存在的形態を数に反映させたものにすぎない．

以下，素朴な自然数がさまざまな具体的事物を計量するのに相まって打ち立てていった自然数自身の重要な性質を見てみよう．

---

[4] ヘーゲル「大論理学」岩波書店「ヘーゲル全集6b」武市健人訳　1975年11月20日第16刷発行 上巻の二 p30 参照

[5] 参考：吉田洋一著「零の発見」岩波新書49

2. 演算の成立

2−1. 加法の誕生

素朴な自然数においては，単位１の計量によって集合数が規定される．１の計量は具体的事物の計量と同じことであるからこれも「数える」という[6]．数えるのは数えることを必要とする当事者の恣意的な行為であり，ヒトは歴史的にも早くから想像の及ぶ限り新しい大きな数を作ってきた．また数え方そのものにも様々な方法が生まれ，モノの個数だけでなく，入れ物に詰められたモノの総数を数えたり，また物質的な増減や他の物資との交換条件の変動などに応じて，その都度再計量するなど様々な様相を取らなければならなくなった．ここからやがて「演算」（算法ともいう）という数独自の規定性が認識されていく．

演算とは集合数を対象にして計量することであるが，ここではもうすこし厳密に「二つの集合数にひとつの集合数を対応させること」を演算（二項演算）ということにする．以後，数の計数等式を単に「等式」といい，等式を成立させている左辺・右辺の集合数（の集まり）をそれぞれ「式」ということにする．これは数の計数等式にはすでに具体的事物の影が残っておらず，計量も演算という数独自の計量に発展していることを明確にするためである．

人類は抽象的な数を持たない「計数の時代」からすでにモノの計数自身を数え合わせることを実質行なってきた．ここのりんごと向こうのりんごで合わせて何個というような日常的な経験から，今度はそれを数によって行なうようになる．やがて数えるより以上の技術として「数え合わせる」技術が確立された．これが演算の誕生である．このとき歴史上最初の「数学者」が誕生したかもしれない．彼らは数えあわせることが人より秀でることで特別の社会的地位を得ていたかもしれない．最初の演算はおそらく「加法」であろう．

加法とは（すでに数えてある）二つの集合数を，さらに一つの集合数に「数え合わせる」ことである．ある集合数にもう一つの集合数を数え合わせることを「足す」「足し算する」といい，最初の集合数を被加数，あとの集合数を加数という．単位としての１が２つ，別にまた３つあるとき，これらは全部で５つあることを「２と３は合わせて５である」とし，「2+3=5」という等式を規定する．等式の左辺 2+3 は (1+1)+(1+1+1) という意味で，結局１がいくつあるかを右辺の５が表わしているのが加法の等式である．したがって 2+3 の２も３もどちらも集合数で，量の単位としての１は見えていない．しかし右辺の５は単位の１が５つあるという意味で単位と集合数の一つの統一を表わしているのである．演算とは数における内面的対立の一つの解決の表現である．

等式の規定や演算を行なうときは常にその背後に何かの「単位」が隠れていることを意識して実行しなければならない．演算に特有の困難はすべてこれに由来する．

> 例えば，2+3=5 の 2 はりんごで 3 がネコを表わしているならば，和の５は意味をなさない．数としての２と３の単位でもどちらも共通する単位としての「りんご１個」を意識していなければならない．

---

[6] ヘーゲル「大論理学」前掲（脚注6） p34 参考

もちろん等式 2+3=5 が最初からこの表現を用いていたわけではない（記号+などはヨーロッパ中世になってからともいわれている[7]）．人類の単位社会ごとに異なった表現があったであろうが，いずれの社会においても加法が最初の演算であることは想像に難くない．

加法という演算の大きな特徴として，制限がないことが挙げられる．（素朴な）自然数の性質に順序性が見出されて以来，ヒトはいくらでも大きな数を作ることで加法の演算としての制限を取り払ってきた．どんな大きな集合数どうしの足し算でも必ず和があるのである．古代ギリシアの数学者アルキメデスは「数 a, b に対してa×n＞bとなる自然数 n がある」という「アルキメデスの公理」を確立している．これはいくらでも大きい自然数が有ることが大前提である．

あらゆる加法の基本は 1 の足し算である．1+1=2 の左辺の 1 は集合数である．1 が単位であると同時に集合数であるという認識なしにはこの足し算は成立しない．左辺の式 1+1 はやがて「1+1+1」や「1+1+1+1」などという式に必然的に発展する．これは結局まず一番左の集合数に次の集合数を足し，それにまた次の集合数を足していく等々を繰り返すことである．このようにひとつの等式で複数の演算を表わした等式を「計算式」と呼び，その中の演算を順次解決していくことを「計算（する）」という．この計算式から (1+1)+1=3,　1+(1+1)=3，したがって (1+1)+1と1+(1+1)は同じ結果になるという加法の「結合法則」や，1+2 の結果は 2+1の結果に等しいという「交換法則」などが見出される．1 以外の集合数の交換・結合法則 2+3=3+2 も，これを 1 による計算式に還元することによって，(1+1)+(1+1+1) = (1+1+1) + (1+1) から明らかである．これらの法則は，この時点ではまだ長いあいだの経験によってどんな集合数においても正しいに違いないという経験則にすぎない．

人類は単位としての 1 の計量を数としての 1 の演算に発展させて，それを実際の事物の具体的計量によって検証しながら，等式自身の正しさを経験的に確信し，この自然発生的な演算行為を文明社会の基本技術にまで発達させたのである．

2−2. 乗法

歴史上，加法以外の他の演算もほとんど同時に見出されていたであろうことは容易に想像がつく．数はもともと多種多様の計算の必要性から生み出されたものだからである．

加法だけを連続的に行なって作られる計算式を「加法の展開」という．2+3 は一個の加法であるが，2+3+4 は 2+3=5 のあとにつづけて 5+4 という加法を行なうことを示す．これが加法の展開である．

乗法は，展開された加法の式の中の特別なもの，例えば 2+2+2，3+3+3 などのような表現が現れてきたとき，これらを「2を3個数え合わせる」とか「3を3個数え合わせる」というように「二つの数」によって表現することから始まった．

2+2+2とは，２を３個数え合わせることであり，これは２を単位とし３を集合数とする新たな演算である．１の代わりに今度は２を単位として 2+2+2 という式が作られてこれに対応する集合数を対応させるという操作が必要となる．「2を３つ数え合わせる」という表現として

[7] wikipedia「https://ja.wikipedia.org/wiki/プラス記号とマイナス記号」参考

2×3と表す．初めの２を被乗数，あとの３を乗数という．この本質は (1+1)+(1+1)+(1+1) であるから 6 が対応する．従って等式としては 2×3=6 という表現になる．これが乗法の成立である．乗法も結局単位の数え合わせにすぎないことは明らかであるが，これを加法とは区別して「２に３を掛け合わせると６」という意味で「２かける３は６」と読んで，乗法を表す等式とするのである．乗法を実行することを「かける」「かけ算をする」といい，結果である集合数６を「積」という．乗法の難解さは，最初の数は単位，次の数が集合数という演算の性格が加法とはまったく違うところにある．この複雑さを簡略化し，計算時間の短縮効果を求めるためのものとして日本の「九九」がある．九九の各段は十進数一桁の単位に同じく十進数一桁の集合数を掛け合わせた積の一覧からなっており，全部で九個の段を反復練習によって記憶することによって乗法の煩雑さを回避したものである．同様の技術は世界中に存在し，各国の数学教育の重要な項目となっている．

乗法の形式化が生み出す独特の表現として 1×1=1 がある．この式の被乗数の 1 は単位であり，乗数の 1 は集合数である．そして右辺の 1 はもちろん集合数である．乗法 a×b では被乗数の a は単位，あとの乗数 b は集合数であることを峻別しなければならない．乗法という演算には数の基本的対立が如実に表されているのである．

乗法についても交換法則・結合法則といわれるものが成り立つが，それは加法と同様に長年の経験的な検証からその正しさが認められてきたものである．交換法則 2×3=3×2 では，

$$2\times3=2+2+2=(1+1)+(1+1)+(1+1)=(1+1+1)+(1+1+1)=3+3=3\times2.$$

また結合法則では，例えば (2×3)×4=2×(3×4) の左辺は，

$$(2\times3)\times4=(2+2+2)+(2+2+2)+(2+2+2)+(2+2+2)=6+6+6+6=6\times4=24.$$

(2×3)×4=6×4 では６が新たな単位となっている．右辺は，

$$2\times(3\times4)=2\times(3+3+3+3)=2\times12=2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2=24$$

2×(3×4)では全体の単位は２のままで，合成数 (3×4) の中では 3が単位，4が合成数である．そしてこの計算の最後のかけ算は単位の２と3×4の積12との掛け合わせになる．このように乗法には見かけ以上の理解の困難さがある．

ちなみに，１個20円のみかん3個ではいくらかという設問では 20(円)×3(個)=60(円) となる．ここでは20が単位であり，その性質は積の60に受け継がれ，60の単位は円になる．これを3(個)×20(円) とするのでは単位が3なので60の単位は「個」になってしまう．これは一皿3個のみかん20皿では何個になるかに対応する計算式である．このように単位と集合数との関係は具体的事物の計量においては重要な案件となるが，数の計量においては積の単位性は捨象され，たんに集合数としての一致において交換・結合法則の整合性を認めているのである．

加法と乗法がそろったところで，交換・結合に続く第三の計算法則としての「分配法則」について述べる．分配法則とは，加法と乗法の関係を表わす式で，

(1) $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

(2) $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

という計算法則である．(1) では，左辺が乗法の乗数が二つの数に分解されており，右辺では二つの積の和になっている．乗法が単位 a の数え合わせに帰することから，b+c=d として，

(1) $a\times(b+c)=a\times d=\underbrace{a+a+\cdots a}_{(d個)}=\underbrace{(a+a+\cdots)}_{(b個)}+\underbrace{(a+a+\cdots)}_{(c個)}=a\times b+a\times c$

(2) の左辺は被乗数が二つの数の和になっていて，右辺は(1) と同じ二つの積の和である．a+b=d として，

(2) (a+b)×c=d×c=d+d+⋯=(a+b)+(a+b)+⋯=(a+a+⋯)+(b+b+⋯)=a×c+b×c

２−３．累乗

加法から乗法へ発展してきた演算は次に「累乗」へと発展する．累乗の基本は「自乗」（≠二乗）である．乗法の式で例えば 3×3 の場合，初めの３が単位，あとの３が集合数であるが，どちらも3であり，一つの演算の単位と集合数がどちらも同じ数で表わされている．2×2 は「2を2つ数え合わせる」とか，3×3 なら「3を3つ数え合わせる」のように表現される．これらを「数え合わせ」の基本によって単位１を用いて表せば，

2×2=2+2=(1+1)+(1+1)=1+1+1+1=4

3×3=3+3+3 = (1+1+1)+(1+1+1)+(1+1+1) = 1+1+1+1+1+1+1+1+1=9

ということになる．これが自乗である．よって2を2つ数え合わせるのは「2を自乗する」，3を3つ数えあわせるのは「3を自乗する」という表現になる．ここには数は１個しか出てこないが，それはその１個の数の中に単位と集合数が統一されていると考えることができ，これによって数の基本的対立は解消されている．二つの数による演算はここで完成を遂げる．

しかし，数の抽象性はこの自乗という演算が形式的にさらなる発展をすることを妨げない．加法と同様に，乗法も2×3×4 のような連続的な展開を可能にする．これが「乗法の展開」である．自乗はひとつの数が単位であり集合数であることからその式としての表現はひとつの数だけあればいい．だから3×3=9と書く代わりに例えば <3>=9 などとしてもいいのである．だが，3×3=9 から 3×3×3とか，3×3×3×3などという式が展開されるのは至極自然なことである．これが「自乗の展開」である．

3×3×3 を「３を三回かける」と呼ぶならば，3×3 すなわち３の自乗は「３を二回かける」というべきで「３の二乗」と改称される．また，式も（<3>などではなく）3^2 とする．同様に 3×3×3 は「３の三乗」と呼び，これを 3^3 と表すのである．同様に 3×3×3×3=3^4，⋯．これが「累乗」（冪）という演算である． 3^2 の３を「底」，２を「指数」という．こうして自乗は累乗の特別なものとなる．

a^b という累乗の形だけをみると，またしても a が単位， b が集合数という基本的対立が起こっているように見える．そこで加法から乗法，乗法から自乗・累乗と進展してきたようにさらに累乗から高段階の演算が考えられないかを一考する．つまり累乗を展開するのである．

加法・乗法からの発展によって 2+2=2^2，3+3+3=3^2，4+4+4+4=4^2という自乗が生み出されたように，2×2，3×3×3，4×4×4×4という新たな演算が考えられる．これを試みに「自累乗」という新しい演算とし，≪4≫= 4×4×4×4 という記号も仮に取り入れてみよう（自分を自分で累乗するわけである）．

≪2≫= 2^2，≪3≫= 3^3，≪4≫= 4^4，⋯．

こうしてまたしても単位と集合数を一致させるような演算が得られた．するとこれまでの演算とも合わせて例えばつぎのような計算式ができる．

2×≪3≫+３×4^2+4×2+1=2×(3×3×3)+3×(4×4)+4×2+1=111

しかし自累乗は累乗に，累乗は乗法に，そして乗法は加法に還元され，結局最後は 1 の「数え合わせ」に帰することはこれまでと変わらない．結局これ以上演算の形式的な発展は数え合わせの煩雑さが増えるのみである．

ヘーゲルは加法や乗法のように数を結合する演算を「積極的算法とでも呼ばれ得るもの」といい，反対に減法・除法のように数を分離する演算を「消極的算法とでも呼んでよいもの」といっている[8]．負の数や分数を生み出す契機となる減法・除法の革新的性格からすれば必ずしも正鵠を射ていない表現であるが，歴史的にも新しい積極的演算は現れて来ない．

積極的演算が加法・乗法・累乗の三つに限ることの根拠は，数の持つ単位と集合数の基本的対立が，初めは内在的なもの（加法）として，次に直接対立（乗法）へ，そして統一（自乗）されるという三段階を経ることにある．この対立を解決するための演算の技法としてはこれで一応の完成を見るのである（ヘーゲル）．顧みるならば結局，乗法は加法の形式的展開から，累乗は乗法の展開から生まれてくるのであり，すべての積極的演算は 1 の数え合わせに過ぎない．

２−4．減法と０

ヒトは加法によっていわば数（集合数）の統合を行なうすべを手にしたが，これとは逆に数を分解することへの関心が起きてくるのは自然の成り行きである．具体的事物の分別，例えばりんご5個を2個と3個に分けることを等式に反映すれば， 2+3=5 を逆転した等式「5=2+3」にすることによって表現できる．これは A=2 などとは違って等式の両辺とも数による等式であることによって可能である．数の分解が「減法」の確立につながるであろうことは見やすい．

自然数の積極的演算としての加法は，必然的にその反対物である消極的演算としての「減法」を生み出す．あまたの集合数はそれぞれがもともとの単位である 1 の集合体であるか，または他の集合数を数え合わせたものとして存在する．次に，さてその数はどの集合数によって数え合わされたものであるかという反省を生む．この反省は「数える」という積極的行為から見ればすでに数えられたものへの回帰であり，その意味で消極的行為である．

減法は，加法 a+b=c が成立したのちあるいは同時に，この c はどのような足し算によってできたものかという回顧が行なわれる時，これを逆転した式 c=a+b から始まる．例えば 3=2+1とは左辺の3が右辺の2と1とに分解されることを示している．

減法は 3=2+1 が２に１を「足して」成立したのであるからこの１を「取り去る」行為によって，加法が行なわれる前の２を見出す．このように，ある集合数からそれより小さい集合数を取り去ることによって新たな集合数を見出すという行為を演算として成立させたものが「減法」である．初めの数を「被減数（引かれる数）」，あとの数を「減数（引く数）」という．減法の実行を「引き算」あるいは単に「引く」という．引き算の結果である集合数を「差」という．この行為は 3−1=2 という等式で表される．それは 3=2+1 という足し算の成立が前提である．同様に，3=1+2 から 3−2=1 も導かれる．こうして減法も加法に似た等式表現を持つことで最初の形式的独立を実現させる．この進歩は消極的演算として派生した減法の演算としての自立

[8] ヘーゲル「大論理学」前掲（脚注6） p34 参考

への第一歩である．しかしすでに（素朴な）自然数には最小の数としての１とそれより大きい数たちとの間に順序性を見出している人類は，減法を行なうには一定の制限があることを自覚する．それは減法に独特な難解さを生む．減法の消極性は加法とは異なるこの不自由さにも表れている．

減法の成立は，その信頼性が加法に依存することから，加法と減法の関係を研究するための「数学」が学問になる契機となる．こうしたいきさつを経て（素朴な）自然数論は，やがて数学というひとつの「科学」となって人類の進歩に大きな貢献をしていくのである．

減法の論議に欠かせないのが０（零（れい））である．０とは単なる「無」や「空」ではない．ある特定の「何か」がないことを意味する．A=3という計数等式は，A=2，A=1 と引き算されて，この最後の１が費消されたとき，A=□（空白）という表現になる．このAはすでに個別的事物ではなく概念であるから，概念としてのAが今ここには「ない」ことを示している．そして数が一般的概念として成立していく中で，ここに或る「数」を考えることで，他のB=□，C=□，…などにも応用できることに気づく．この空白が０の発見の発端である．

０に関しては，吉田洋一氏著「零の発見[9]」という歴史的名著がある．本書において著者は，古代インドに始まる０を含めた十個の数字を用いて数を表す位取り記数法の利便性を説いた後で，

> 「この０に類似の記号を思いついて、算盤から位取り記数法に移るのはただ一歩の労に過ぎないではないかという人があるいはあるかもしれない。／しかしながら、この一歩こそは人類文化の歴史における巨大な一歩であった。」（同書．引用は昭和38年第33刷より p.11）

と述べている．アラビヤ文化を通じてインド式の位取り記数法が伝わるまでヨーロッパでは，

> 「零はついに発見されなかったのである。」（同書p.12 同上）

０を数として認めることから「a−a=0」という式が成り立ち，これの反省的規定によって「a+0=a」が出てくる．０が減法から出てきたことは間違いないが，０の性質は０を用いた加法から出てくるのである（ a×0=0 等については後述）．

０を用いた位取り計算法は様々な抵抗にあいながらも次第に全ヨーロッパに広まり，やがて０の性質「a±0=a，a×0=0×a=0，a÷０や0÷0 の禁止」などが規定された．しかし現在においても０は自然数ではないというのが通説である（筆者もこの立場である）．その最大の理由は０は「数え合わせるための数」ではないことである．自然数はものを数えたり，同じことであるが個別的存在物に「番号」をつけるための数だからである．ものをかぞえるのに「０，１，２，…」としたのでは正しい個数が得られない．よって０は自然数ではない．では何か．それは「０以外の数」であるというのが解答である．ここでは「数には０と自然数がある」というに留め，「整数」という概念は用いないこととする．

古代インドにおける０の発明がいかなる経緯をたどったかは知る由もないが，ヒトが「計量の時代」にあらゆるものを計量しながら，これまで何個かあったものがなくなったことをただ自分が確認するだけでなく，「何々がない」ということを記述によって人に伝えるために，０

---

[9] 岩波新書49．第１刷は昭和14(1939)年　「零の発見―アラビア数字の由来―」と「直線を切る―連続の問題―」の二章からなる．

が発明されたと考えられる．すでに１〜９の算用数字が用いられている共同体内や他の共同体との物的交流の中で，当時の一般の民衆が「何々がない」ことを具体的に伝え合うとき，０を用いることで巨大な利便性を手にした．０の発明は，日々の生活にそれを必要とする人達によってこそなし得られたのである．前掲書「零の発見」は次の文章をもって締めくくられている．

> 「それにしても零の発見という劃期的な事業をなしとげた無名のインド人は、その発見が今日のように全世界に恩沢を与える日があろうことを夢にも考えたことがあるであろうか．昔といまとを問わず、みずから劃期的と誇称した事業が真の意味で劃期的であったためしはあまりこれを聞かないようである。」

０の重要な性質である $a\times0=0$ は分配法則から導かれる．$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ で $c=0$ とすると，$a\times(b+0)=a\times b+a\times0$ となるが，$b+0=b$ であるから左辺は $a\times b$ である．ゆえに右辺の$a\times0$ は $=0$ でなくてはならないことになる．

このように，０は自然数の演算において不可欠な「数」となる．

２–5．除法および剰余

減法が加法に対する消極的演算であるように，除法は乗法に対する消極的演算である．減法の場合と同じように，除算は乗法の反省から生まれた．例えば $2\times3=6$ を既知とするとき，6は2に何をかけたのかという反省から，6と2から3を導く演算を考える．これが $6\div2=3$ という除法の始まりである．したがって除法は乗法の成立が前提となっている．

$2\times3=6$ が２を単位とし，３を集合数として成り立つ演算であることが除法に反映し，６という集合数の中に２という単位がいくつあるかという，集合数を求める演算となる．

しかし減法が加法を前提としないようになると減法が成立しないような場合が生まれるように，除法が次第に乗法から独立した演算となることによって，乗法を前提としない式が発生する．例えば $1\div2$ というのはすでに乗法に依拠しないで，ある単位的存在を２つに「等分」するという実際的課題から生じる．２個や４個の場合は $1\times2=2$，$2\times2=4$ というかけ算の反省から容易に解決される等分問題が，$1\div2$ では解決されない．これを数学的にではなく実際的に解決することから「半分」や「二分の一」という概念が生まれ，将来の「分数」の確立につながっていくのである．

しかし一方，例えば10人の人間を三つの場所に等分配する場合などでは，まず三人ずつを分け，残りの１人を分けることはできないからその１人を「余り」とする考え方も生じる．つまりこれ以上分けられないものは余剰として分配から除外するのである．

また $10\div3$ という式は，3にある自然数をかけて10になることを前提しないで，単に $a\div3$ という式の a を10に恣意的に置き換えたものと見ることから，除法という演算を乗法から独立した演算として捉えるという考え方も生まれる．

こうして自然数の除法が先に進むには二つの道があることになった．一つは「分数」という新しい数の確立へ，もう一つは「剰余」という除法独自の数の概念の発見である[10]．

---

[10] 分数はエジプトで確立し，位取り記数法による小数の表記はヨーロッパでは近世以降になる．(参考：「https://ja.wikipedia.org/wiki/小数」)

以下では文字式の乗法の記号×を省略する場合がある．

自然数における除法の定義は次の通り．

「二つの自然数a, b に対し，

$$a=bc$$

が成り立つような自然数 c が存在するとき，a はb で割り切れるといい，a をb の倍数，b を a の約数という．このとき c を a, b によって c=a÷b と表わす．」

自然数 a, b, c で a÷b=c が成り立つとき，この演算を除法または割り算といい，a を被除数，b を除数，c を商という．

除法を割り切れるものだけに限定することは，除法を乗法の付随物とすることである．それは消極的演算としての限界である．しかし剰余の概念を取り入れることで，除法は乗法から独立し，むしろ乗法を自分の補完物とする．

剰余の定義は次の通り．

「二つの自然数a, b に対し，

$$a=bc+r$$

が成り立つような 0 または自然数 c, r が存在するとき，r を 「a を b で割ったときの剰余」という．」

上記の場合も c は商ということにする．r<b としていないことに注意．

例：10=3×3+1=3×2+4=3×1+7，1，4，7 はすべて10を3で割った剰余．また 12=3×4+0 では12を3でわった剰余は０．

特に r<b のときの r を（a を b で割ったときの）「最小剰余」または「余り」という．通常の割り算では最小剰余を用いる場合が多く，

$$a=bc+r \quad (0\leq r<b)$$

と表記される．初学的な「算数」では，

10÷3=3 余り 1

と記すこともある．

剰余を用いた計算法に「合同式[11]」がある．

自然数 a, b, c で，a−b が c の倍数であるとき，

$$a\equiv b \ (\ (\mathrm{mod.}c)$$

と表わす．このとき，a, b は共にc の剰余と呼ばれる．

例：10≡1 (mod.3)．20≡6 (mod.7),

自然数 a を２で割った余りが０となるときは a を「偶数」といい，余りが１であるときは a を「奇数」という．０については，任意の自然数 a について 0=a×0+0 が成り立つので偶数とする．

偶数：0,2,4,6,…．奇数：1,3,5,7,…

[11] ガウスの創始による．合同式が本領を発揮するのは整数の世界においてである．ここでは紹介に留める．

１より大きい自然数 a の約数が１および a 自身のみであるとき，a を「素数」という．
素数：2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,91,97,…

約数，倍数などについては「整数」論において再定義され，そこで本格的な議論が行われるため，これもここでは詳細にはふれない．ただ，素数は通常自然数としてのみ扱われる．

２−6．公理的自然数論

これまでのおもに認識論的な観点から自然数についての議論を行なってきたが，これだけでは人類の社会的基盤を支える科学としてはあまりにも不十分である．20世紀数学の大きな潮流である数学基礎論の台頭を背景に，厳密な自然数論を築こうという機運が数学者の中で起こってきた．そのもっとも代表的なのが「ペアノ[12]の公理」と呼ばれる公理的自然数論である．

ここでは遠山啓著「現代数学対話」（岩波新書643）に基づいてその骨子だけを紹介する．

公理とはある「理論においてはじめから仮定されているいくつかの事がら」のことで，「無証明命題」ともいわれる[13]．この公理だけを根拠としてさまざまな理論の体系を組み上げていくのが現代数学における方法の主流である．

ペアノの公理は次の通り．はじめに集合Nが前提とされる．Nは次の５つの公理を満たすとき，「自然数の集合」になる．(以下の項目は「現代数学対話」の文章をそのまま引用した)

(1) Nは１番めをふくむ．これを１で表わす[14]．
(2) Nの任意の要素 a に対して，a のつぎにくる要素をNがふくむ．これを a^+ と表わす．
(3) $a^+=1$ となるような a は存在しない．$a^+\neq 1$．
(4) $a^+=b^+$ なら必ず $a=b$ になる．
(5) MがNにふくまれる集合であり，１をふくみ，Mにふくまれる任意のaに対して必ずその後継者 a^+ をふくむならM=Nになる．

以下に簡単な解説を示す．

(1) 拙論の「１の発見」で述べたように，これの設定なしには自然数はありえないのだから当然である．人類は１を発見してこそ数学を初めたのである．

(2) は１以外の集合数の存在規定である．集合数は順序よく無限に並んでいる．

(3) １の「前」には数がないことを示す．言い換えれば０は自然数ではない．

(4) ではNの要素 a,b のそれぞれの次の数が等しいならば a,b も等しいとする．これは自然数の演算を規定するときに重要である．

(5) は「数学的帰納法」と呼ばれる証明方法の根拠となる命題で，これを駆使して様々な自然数に関する問題（交換・結合法則など）が解決される．

---

12 Peano (1858〜1932) イタリアの数学者．ペアノの曲線の発見者．自然数の公理論を最初に行ない，その公理群は…ペアノの公理として有名である．（矢野健太郎篇 編「数学小辞典」昭和49年初版19刷発行より）

13 矢野健太郎篇 編「数学小辞典」昭和49年初版19刷発行「公理 [axiom]」の項目から抜粋した．

14 現在では１ではなく，０とされる場合もある．(参考：https://ja.wikipedia.org/wiki/ペアノの公理)

これらの公理を使って自然数の加法がどのように規定されるかを見てみよう[15]．Nの任意の要素 x に対してもうひとつの要素 y との演算 x+y を次のように定義する[16]．

定義(1) y=1 のときは，$x+1=x^+$．つまり xと1との演算の結果はxの次の数である．

定義(2) $x+y^+=(x+y)^+$ とする．すなわちxとy+1との演算の結果はx+yの次の数である．

これでNにおいてどの要素の間でも加法が成り立つことが証明される．証明は公理(5)による．この演算を満たすNの部分集合をMとする．まず定義(1) によってMは１を含む．次にMの任意の要素をx, yとすればx+yはMの要素である．そして定義(2) によってx+yの次の数もMに含まれるので，公理(5)によってM=Nとなる．証明終わり．

$1^+=2$, $2^+=3$, $3^+=4$, $4^+=5$, $5^+=6$,…として x=1,y=1から初めてみよう．

$1+1=1^+=2$．$1+1^+=(1+1)^+=2^+=3$，$2+1^+=(2+1)^+=3^+=4$，$2+2^+=(2+2)^+=5$,…，$2+3^+=(2+3)^+=5^+=6$,…

こうして定義された演算を「加法」と名付けるのである．同様の方法で交換・結合法則も証明される．

ペアノの公理は自然数を厳密に構成しているが，その内容は明らかに素朴な自然数における常識的な性質で基本となるものを公理としている．そしてその常識は人類が気の遠くなるような時間をかけて築いてきた「数への信頼」に他ならない．それが揺るぎないものであると思っているからこそ，そこに根拠を置いた公理と体系が作られたのである．

まだまだ自然数について議論すべきことは多いが，筆者が自然数について述べたいことの大半は語っているのでこれでこの小論に区切りをつけたい．

---

15 「現代数学対話」(岩波新書643 1971年第6刷 p.63 を参考にした．

16 初めから＋記号を用いるのは紛らわしいとして「現代数学対話」ではx⊕yを用いている．

あとがき

若い時，マルクスの著書を読んでいてヘーゲルの弁証法を勉強する必要を感じた．かれこれ30年以上も前，一念発起，岩波書店のヘーゲル全集のうち「大論理学」上巻の一，二だけを買って読んだ．一は，もう，無だ有だ定有だ，やれ向自有だのとわけのわからないことだらけで，すっかり辟易してなんども投げ出そうとした．ところがやっと二の「第二編　大きさ（量）」に移って俄然面白くなった．二は全編数学といってよく，この拙論でも引き合いに出した数の弁証法が鮮やかに示されている．無限についても示唆の多い箇所がたくさんある．そしていつかはこのヘーゲルの弁証法を元に数論を書いてみたいと思っていた．特に心酔する高木貞治先生の「近世数学史談・数学雑談」を'04年に復刻版（共立出版株式会社）で読んでからは，実数の連続性と自然数論については数学を志すものは自らの数論を持たなければならないと痛感した．

この拙論の最初の草稿は'14年12月になっている．以後中断が長くその間にガロア理論や平方剰余の相互法則などに取り組んで来て，それらが一段落したときに，改めて数論を書こうと思い至った．初めは自然数から実数の連続性まで一本の論文にするつもりであったが，自然数だけで思いの外長くなったのでこれだけを独立させたのがこの小論である．

振り返ってみると，ヘーゲルよりはマルクスの史的唯物論に乗っかって書いたような，人の肩の上から遠くを見るような力不足の目立つ結果になってしまったが，今の自分にとってはこれが精一杯である．このにちはしばらく数論を離れて念願の「類体論」に移りたいと自分を叱咤している．

なお，献辞させて戴いている「寸虫先生」は，現在わたしが関わっている仕事の先輩で，わたしの数学三昧を応援してくださっている方です．この小論は先生の励まし無しにはあり得ませんでした．謹んでお礼申し上げます．

2018年9月8日　　福沢正男

参考文献

・ヘーゲル「大論理学」岩波書店「ヘーゲル全集6b」武市健人訳　1975年11月20日第16刷発行 上巻の一，二
・マルクス「資本論」新日本出版社新書版第一分冊(1985年第11刷)　資本論翻訳委員会 訳
・吉田洋一著「零の発見」岩波新書49
・遠山啓著「現代数学対話」（岩波新書643）
・矢野健太郎 編「数学小辞典」昭和49年初版19刷
・高木貞治著「復刻版 近世数学史談・数学雑談」（共立出版株式会社1996年 復刻版１刷）
・「モノグラフ公式集」５訂版　矢野健太郎 監修　春日正文 編　発行所 科学新興社　発売元 フォーラム・A